# 一次元量子系の物理

京都大学基礎物理学研究所　川上　則雄

## §1 はじめに

最近、１次元量子系の物理が注目を集めている。その理由の一つに実験技術の急速な進歩にともなって、１次元系に関する興味深い実験事実がたくさん蓄積されてきたことがあげられる。例えば、半導体を用いて１次元電子系が人工的に実現、制御できる段階にきている。また、典型的な一次元系として量子ホール効果のエッジ状態の研究も精力的に行われている。このほかにも量子スピン系における Haldane ギャップの問題や、また準一次元系の有機導体の電子相関なども、盛んに研究されている。

このような物性論での低次元量子系の研究と並行する形で、素粒子物理学においては１９８０年代の中頃から、２次元の共形場理論に関する研究が大きく進展した。共形場理論は、素粒子物理学の超弦理論の基礎となる場の理論である。弦理論では素粒子を点粒子ではなく、１次元的な拡がりをもつ紐にみたてる。紐は時空内の運動の結果として２次元の世界面を張るので、弦を２次元の場の理論として定式化できる。これが共形場の理論である。共形場の理論は弦理論だけでなく、２次元古典系の臨界現象を記述し、また無限次元代数などの現代数学の分野とも関わりを持っている。特に最近では、１次元量子系の臨界現象へ精力的に応用されており、多くの著しい成果が得られている。

ここでは、一次元量子系の物理の中で、「量子臨界現象」にスポットをあてて入門的な講義をする。特に、最近の共形場理論と厳密解を用いた研究を中心に話を進める予定である。まず量子臨界現象について簡単に述べた後、この臨界現象を系統的に扱える共形場の理論について説明する。さらに、厳密解の方法であるベーテ仮説法を導入し、この方法と共形場の理論を組み合わせることで厳密に臨界現象を記述することができることを示す。応用例として、電子系の朝永·ラッティンジャー流体をとりあげ、この概念がどのように共形場の理論で定式化されるかをみる。また、有機導体、量子ホール効果のエッジ状態、永久電流などの、一次元系にまつわる最近の実験結果を紹介する。

## §2 量子臨界現象と共形場理論

１次元量子系では、大きな量子揺らぎのため基底状態は長距離秩序を持たない「量子的に乱れた」状態である

ことが多い。このような量子的に乱れた1次元系は、おおざっぱに二つのカテゴリーに分類される。一つはいわゆる「 massive 」な系と呼ばれるものであり、基底状態からの励起に有限のエネルギーギャップが存在するものである。もっとも有名なのが、整数スピンのハイゼンベルグ模型における Haldane ギャップであろう。もう一つは「 massless 」な系と呼ばれるもので、ここでのメインテーマである。この場合、基底状態からの素励起はギャップなしで、線形の分散関係を持つ。典型的な例は、スピン 1/2 のハイゼンベルグ鎖や、金属相にある電子系である。このギャップなしの素励起に起因して、長距離秩序は実際には存在しないものの、ほとんど秩序しかかった状態が実現しており、それを反映して相関関数はべき型のゆっくりとした減衰を示す（ massive な系では指数型の早い減衰)。このことは、系の相関距離が「無限大」になっていることを意味しており、したがって massless な一次元量子系では絶対零度が「臨界点」となっている。これらの系は「1次元量子臨界系」と呼ばれている。したがって、 massless な量子系は臨界系に特有のユニバーサルな性質を示す。これを記述する枠組みが以下の共形場理論である。

2-1 共形場の理論

よく知られているように、臨界点直上では相関距離が無限に長くなっているので、ミクロなスケールはなくなっている。したがって、このような臨界点において低エネルギーあるいは長波長領域の物理を考えるとき、格子間隔をゼロにもっていく連続極限がとれる。この場合、巨視的スケールでのゆらぎは連続的な場の理論で記述される。ここで、1次元的な拡がりをもつ量子系の時空での運動を考えると「世界面」が現れる。すなわち、1次元量子系の時間発展の方向を2次元時空の時間方向とみなすと、2次元の世界が自然に実現され、ここに2次元あるいは1＋1次元の共形場理論が登場する。

このような臨界現象を記述する2次元の場の理論の対称性は、どのようなものであろうか。ちょうど臨界点では、相関距離が無限大になっているので、スケールを一様に変化させても理論は不変であるという、有名な「スケール不変性」が現れる。共形場の理論では、このスケール不変性が空間の各点で局所的に成り立つことが要請される。この意味で共形不変性は、局所的なスケール不変性とも呼ばれる。このような局所的な不変性は、短距離相互作用を持つ臨界系で、一般に期待されることである。いま、2次元空間の座標 $(x, y)$ から複素座標 $z = x + iy$ を導入すると、共形変換は解析変換 $z \to w(z)$ で与えられる（ $w(z)$ : 任意の解析関数)。ここで $w(z)$ が無限個の勝手な座標変換のパラメータを含んでいることに注意すると、共形不変性は無限次元の対称性になっていることが分かる（図1)。

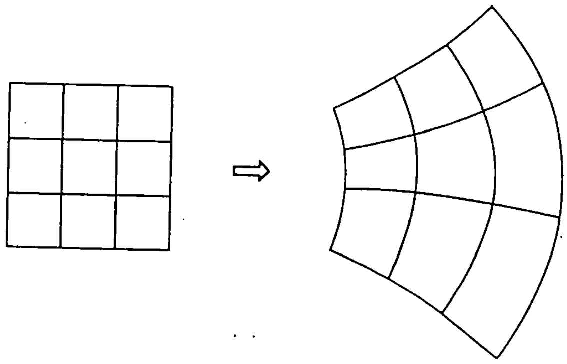
今、無限小の共形変換 $z \to z + \epsilon_n z^{n+1}$ を考え、これを引き起こす生成子を $L_n$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$ と書くことにしよう。上記の無限次元対称性を反映して、$L_n$も無限個ある。$L_n$ の間の交換関係を調べると、

$$[L_m, L_n] = (m-n)L_{m+n} + \frac{c}{12}(m^3 - m)\delta_{m+n,0} \tag{1}$$

の無限次元リー代数が得られる。これがビラソロ代数と呼ばれるもので、共形場理論で中心的な役割を果たすも

のである。右辺の第2項の $c$ は、セントラルチャージと呼ばれる。この $c$ の値によって臨界系のユニバーサリティクラスが分類される。特に $0 < c \leq 1$ では、ユニタリティーの要請より $c$ の値がとびとびの値に制限されることが知られている。例えば $c = \frac{1}{2}$ の理論はイジングモデルの臨界現象を記述する。ここで主に扱う電子系や $S = 1/2$ スピン鎖は $c = 1$ の理論として、分類される。

図1　共形変換（局所スケール変換）



共形場理論でのもう一つの重要なパラメタは「共形次元」 $\Delta, \bar{\Delta}$ と呼ばれるもので、共形変換の下で場が変換するときの重みを表わす。大切なことは、この重みが相関関数の臨界指数そのものをコントロールしているということである。このようにセントラルチャージと共形次元の値が分かると、正確に系のユニバーサリティクラスを決定することができる。このためには一般にビラソロ代数の無限次元の表現論が必要であるが、系のスペクトルが厳密に決定できる時は、以下に述べる有限サイズスケーリングを用いることができる。すなわち、励起スペクトルが作るタワー構造を調べることで共形場理論の定式化ができるのである。

2-2 有限サイズスケーリング

共形場理論の大枠は以上のようなものであるが、さて実際にこれを用いて一次元量子系をどのように解析したらよいのであろうか。このための実践的な方法が有限サイズスケーリングである。いま、無限平面を幅 $L$ を持つ帯状の strip に変換する特別な共形変換

$$z \to w = (L/2\pi)\log z \tag{2}$$

を考えよう。この変換により移された新しい平面を、長さを $L$ の一次元量子臨界系が時間方向に発展した世界面と解釈しよう。詳細は講義で紹介するが、この変換を用いると基底状態のエネルギーは素励起の速度 $v$ を用いて

$$E_0 \sim fL - \frac{\pi v c}{6L} \tag{3}$$

の形に書けることが知られている（境界条件は周期的)。ここで $c$ はビラソロ代数のセントラルチャージで、こ

れが $1/L$ 補正をユニバーサルに決めていることに注意しよう。また、励起状態のエネルギーは

$$E - E_0 \sim \frac{2\pi v}{L}(x+n), \qquad n = 0, 1, 2, \cdots. \tag{4}$$

の形に仕分けすることができる。ここで $x+n$ はこの固有状態に対応する場 $\phi_n(r,t)$ のスケーリング次元で、前に述べた共形次元 $\Delta$ と $\bar{\Delta}$ の和で与えられる。大切なことは、この量が相関関数の漸近的な振舞いに

$$< \phi_n(r,0)\phi_n(r,0) > \sim |r-r'|^{-2(x+n)} \tag{5}$$

の形で現われることである。上記の関係を用いると相関関数の臨界指数を励起スペクトルから読みとることができる。特に $n=0$ に対応する場はプライマリー場と呼ばれる基本的な場である。上式から分かるように、励起スペクトルはプライマリー場のレベルを基本とし、正の整数で指定される励起がこれに単純にたしあわされた形をしている。したがって、スペクトルの中からプライマリー場に対応する状態を見つけだせば、あとの状態は各プライマリー状態の準位から整数間隔できれいに仕分けできて、いわゆる「コンフォーマルタワー」を形成する。数学的には、二次元臨界系のスペクトルがビラソロ代数の既約表現で一意的に分解されることを意味している。

上記のアイデアを用いると、1次元量子系のエネルギースペクトルを共形場理論に基づいて解析することができ、そのユニバーサルな臨界現象を定式化できる。また臨界指数も同時に求めることが可能である。一次元量子系（中でも可積分系）の厳密なスペクトルを系統的に求める方法が以下にのべるベーテ仮説法である。したがって、共形場の理論とベーテ仮説法を組み合わせることにより、1＋1次元臨界現象を解析する強力な手段が得られる。

## §3 ベーテ仮説法

ベーテ仮説法は古くベーテによって1次元ハイゼンベルク模型の厳密解として導入され、現在では電子系などの内部自由度のある系にも系統的に拡張されている。「仮説」という言い方は、「多体系の固有関数にベーテ波動関数を仮定し（仮説）、これが厳密解になっていることを示す」という手続きによっている。この方法論を用いてハバードモデルや近藤モデルなどの厳密解が求められている。厳密解と言っても、全ての物理量がすぐに計算できる訳ではなく、相関関数等はこの方法論では求めることが困難である。ここに共形場の理論がその威力を発揮する。

詳しいことは、他の解説を参照していただくことにして、ここでは、$\delta$ 関数型相互作用を持つボゾン系を用いて、ベーテ仮説のエッセンスを見てみよう。考えるハミルトニアンは、長さ $L$ の1次元鎖を運動するボーズ粒子系で、

$$H = -\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + 2c\sum_{i<j}\delta(x_i - x_j), \tag{6}$$

で与えられる。この固有値問題を考える。相互作用がデルタ関数であることに注意し、2粒子の散乱問題を考え

よう。まず、領域 $\mathrm{Q}_1(x_i < x_j)$ と領域 $\mathrm{Q}_2(x_i > x_j)$ に分けて波動関数を書く。それぞれの領域で波動関数は平面波で与えられる。相互作用による散乱の効果を考慮するため、波動関数をそれぞれの領域で

$$\Phi_{\mathrm{Q}_1}(x_i, x_j) = A_{ij}(\mathrm{Q}_1)e^{i(k_i x_i + k_j x_j)} + A_{ji}(\mathrm{Q}_1)e^{i(k_j x_i + k_i x_j)},$$

$$\Phi_{\mathrm{Q}_2}(x_i, x_j) = A_{ij}(\mathrm{Q}_2)e^{i(k_j x_i + k_i x_j)} + A_{ji}(\mathrm{Q}_2)e^{i(k_i x_i + k_j x_j)} \tag{7}$$

と平面波の重ね合わせで表す。まず、境界上 $(x_i = x_j)$ での波動関数の連続性$\Phi_{\mathrm{Q}_1} = \Phi_{\mathrm{Q}_2}$より、$A_{ij}(\mathrm{Q}_1) = A_{ij}(\mathrm{Q}_2)$, $A_{ji}(\mathrm{Q}_1) = A_{ji}(\mathrm{Q}_2)$ を得る。また、デルタ関数相互作用を反映して微係数は 境界上 $(x_i = x_j)$ で不連続になる:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_j}\right)\Phi\Big|_{x_i = x_j + 0} - \left(\frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_j}\right)\Phi\Big|_{x_i = x_j - 0} = 2c\Phi\Big|_{x_i = x_j} \tag{8}$$

これを解くと、散乱振幅 $S_{ij} = A_{ji}(\mathrm{Q}_1)/A_{ij}(\mathrm{Q}_1)$ は

$$S_{ij} = \frac{k_i - k_j - ic}{k_i - k_j + ic} \tag{9}$$

と求められる。これで２体問題は解けた。

さて、$N$粒子問題を考えよう。まず、空間座標の大きさに関して $0 \leq x_{Q1} < x_{Q2} < \cdots < x_{QN} \leq L$ の配置をとるものを領域 $Q$ と呼ぶ。ただし、$\{Q_1, Q_2, \cdots, Q_N\}$ は $\{1, 2, \cdots, N\}$ のある置換とした。この領域内の$N$粒子固有関数として次のものを仮定しよう。すなわち $N$個の互いに異なるラピディティ $k_1 < k_2 < \cdots < k_N$ を導入し、波動関数を

$$\Phi = \sum_P A(P; Q)\exp[i\sum_{j=1}^{N} k_{P_j} x_{Q_j}] \tag{10}$$

と書く。ここで和 $P$は ラピッディティの配置に関する順列和（ $N!$個）を意味している。この波動関数がベーテ波動関数と呼ばれるものであり、この仮定が「ベーテ仮説」である。この方法論の心は、相互作用のない系の固有関数の重ね合わせで多体系の固有関数を探し、相互作用の効果は位相係数 $A(P; Q)$ と波数 $k_j$ に完全に繰り込もうというものである。著しいことに、ベーテ波動関数中の係数は、２体の散乱行列 $S_{ij}$で決定される：

$$A(k_j, k_i; Q) = S_{ij}A(k_i, k_j; Q) \tag{11}$$

この波動関数が固有関数になっていることは直接計算することで確かめるられる。

さて、周期境界条件を課してエネルギースペクトルを求めよう。ある粒子の座標 $x_j$を長さ $L$ だけ動かしたとき、粒子が散乱されるごとに $S_{ij}$という因子がでてくることに注意する。これは、位相で表現すれば一回の散乱ごとに

$$\theta(k_j - k_i) = 2\sum_{i\neq j}\tan^{-1}[(k_j - k_i)/c)]$$

の位相シフトが生じることに対応している。結局、周期境界条件のもとで

$$k_j L = 2\pi I_j - \sum_{i\neq j}\theta(k_j - k_i) \tag{12}$$

の方程式が得られる。ここで $I_j$は整数かあるいは半整数で、系の励起を指定する量子数である。エネルギーはこのラピディティを用いて自由粒子の形 $E = \sum_{j=1}^{N} k_j^2$ に書ける。つまり、相互作用の効果はラピディティに繰り込まれている。

このベーテ仮説法によって量子可積分系のスペクトルが厳密に計算できるので、前に述べた共形場理論と組み合わせることで、相関関数などの臨界的性質を正確に調べることができる。以下では、その応用の一例である、一次元電子系の朝永ラッティンジャー流体論についてながめてみる。

## §4 朝永·ラッティンジャー流体

### 4-1 3次元電子系と1次元電子系

通常、3次元の金属中の多体電子系の挙動を云々する場合には、、いわゆるランダウのフェルミ流体論をもとにする。この考えは、相互作用をしている電子はあたかも「衣を着た自由電子」(準粒子)のように振る舞う、というものである。ここで「衣を着た」とは、電子間の相互作用を繰り込んでいるということを表している。このようなフェルミ流体の考えは3次元では成立するものと信じられているが、系の次元が低くなるとこの考えが成立するかどうか微妙である。低次元になると、量子効果によるゆらぎが大きくなるためである。特に1次元では量子ゆらぎがたいへん大きいのでフェルミ流体の考えは破綻し、それにかわって朝永·ラッティンジャー（ＴＬ）流体という概念が登場する。

フェルミ流体とＴＬ流体を区別するには、運動量分布関数を考えると便利である（図2）。まず絶対零度における3次元の自由電子系を考える。パウリ原理にしたがって、電子をエネルギーの低い方から順番に詰めていくと、基底状態ができあがる。ここで運動量で指定される状態の占有確率「運動量分布関数」を導入する。この関数を電子の運動量でプロットすると、フェルミ面 $k_F$まで1の値をとり、そこをを越えると急に0になる、いわゆるフェルミ分布が得られる。さて、この系に相互作用を入れるとどうなるだろうか。単純に想像すると、相互作用による電子の散乱で運動量分布も大きく変更されてしまいそうであるが、実はパウリ原理による強い拘束の

ため電子の散乱は大きな規制を受ける。その結果、運動量分布はフェルミ面において依然として不連続性を示し、シャープなフェルミ面を維持する。この不連続性の存在はフェルミ流体を特徴づけるものである。一方、１次元ではフェルミ流体は大きな量子ゆらぎのため、完全に破綻する。この場合フェルミ流体と対照的に、シャープなフェルミ面は相互作用によって完全にならされてしまい、連続関数になってしまう。しかしながら、運動量分布はフェルミ面で依然としてべき依存型の異常 $|k-k_F|^\theta$ を示す。ここで $\theta$ は臨界指数と呼ばれ、べき異常を特徴づけるものである。このようにフェルミ面付近の運動量分布関数、さらに種々の相関関数が「べき異常」を示すような量子流体を、ＴＬ流体と呼ぶ。

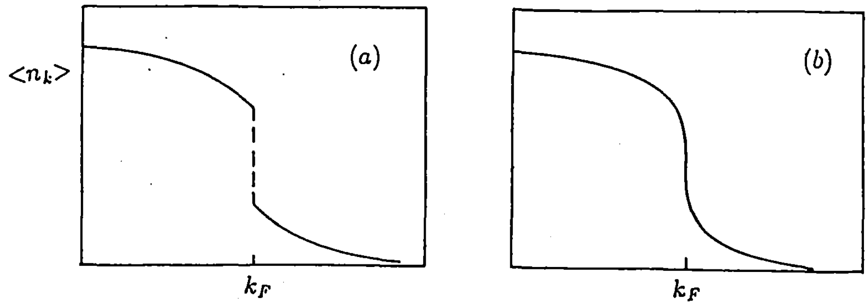



図2　運動量分布：(a) フェルミ流体、(b) ＴＬ流体

ＴＬ流体の研究は古くからなされ、特にボゾン化の方法を用いて「弱相関」の場合が詳しく調べられてきた。最近の計算物理の手法や場の理論を用いた研究で、「強相関領域」まで含めてＴＬ流体の全体像がほぼ明らかになっている。

4-2 共形場の理論とＴＬ流体

それでは、上記のＴＬ流体が共形場理論でどのように定式化できるのであろうか。まず気になることは、１次元電子系で準粒子の描像が破綻しているとなれば、これにかわる繰り込まれた粒子とはなにか、ということであろう。実は、１次元電子系ではスピン密度と電荷密度の集団励起（素励起）が繰り込まれた粒子となりうる。この素励起をスピノン、ホロンと呼ぶことが多い。もともと電子は電荷とスピンをもつ粒子として導入されているが、多体電子系の低エネルギー励起としては、スピン自由度を担うスピノンと、電荷を担うホロンが見えるのである。勿論、このような現象は単独でいる電子では起こらない。スピンと電荷励起のモードが分離してよい量子状態を作ることは「スピンと電荷の分離」と呼ばれ、フェルミ流体には現れなかった１次元電子系の特徴である。このようなスピン·電荷の分離は、弱相関の模型では以前からボゾン化法を用いて知られており、最近強相関の領域でもこれが成り立っていることは、いろいろな方法で調べられている。

この二つの素励起は金属相でともに massless になっており臨界現象を示す。さらに、それぞれのモードが独立に共形場の理論で定式化される。具体的には、ハバードモデルなどのベーテ仮説解からエネルギースペクトルの有限サイズ補正を計算し、その結果を共形場理論で解析することによって、臨界現象の分類をおこなう。同時

に相関関数の臨界指数なども正確に計算できる。例えば、上に述べた運動量分布関数のフェルミ面付近でのべき異常を共形場の理論から正確に決定することができる。講義では、このあたりの計算について詳しく述べる予定である。

### 4-3 カイラルＴＬ流体

以上の話は、いわゆる通常の電子系についてであり、このときのＴＬ流体はもちろん右向きと左向きに進む波から成っている。この分解は、共形場の理論が解析部分（$z$の部分、左向き）と反解析部分（$\bar{z}$の部分、右向き）からできているという事実に他ならない。実際の電子は両者の貼り合わせで与えられる。そこで単純な疑問として、片方だけの共形場で記述されるような物理現象はあるだろうか（片側だけのＴＬ流体はカイラルＴＬ流体と呼ばれる)。これに関して Wen らによって、量子ホール効果のエッジ状態をカイラルＴＬ流体で記述することが提案されている。例えばディスク状の系で量子ホール効果を考えると、そのディスクの境界を流れる電流は磁場の効果で一方向を向いている。さらにエッジ部分の振る舞いは、バルクの量子ホール効果と異なり、ギャップレスの臨界的なものとなっている。その結果、このカイラル流体の臨界現象は片側だけの共形場の理論で記述される、というシナリオである。エッジ状態はバルクの量子ホール効果の情報を含んでいるので、エッジ状態の共形場理論による解析からバルクでの分数量子ホール効果を理解しようというアプローチが可能であり、現在精力的に行われている。

## §5 応用

以上述べたように、一次元量子臨界系の基本的な性質は、古くからある弱相関理論、数値計算さらには共形場の理論よる研究で、ほぼ明らかになっている。最近では、実際の系への応用が精力的に行われている。特にメゾスコピック系への応用が盛んで、量子細線でのトンネル効果や永久電流などがよく調べられている。また量子ホール効果のエッジに関する実験、理論ともに多くの研究がなされている。もちろん古くから研究されてきた準１次元系の有機導体のＴＬ理論による解析も行われている。講義では、これらの話題に関する最近の実験ならびに理論的な試みを紹介する。

## §6 おわりに

ここでの話は現在、固体物理の「誌上セミナー」に連載中であるので、詳しい計算や、参考文献等はそのなかに記されているものを参照して頂きたい：

川上則雄、梁成吉：固体物理 ２８巻１０月号、１２月号（１９９３)；２９巻2月号、5月号（１９９４)；継続中

各項目に関する分かり易い解説を一件ずつ上げておくと

(a) 共形場理論: *Fields, Strings and Critical Phenomena*, eds. E. Brezin and J. Jinn-Justin (North-Holland, 1990).

(b) ベーテ仮説: *Exactly Solvable Problems in Condensed Matter and Relativistic Problems*, Lecture Notes in Physics **242** (Springer-Verlag, 1985,) ed. B. S. Shastry et al.

(c) 共形場とＴＬ理論: N. Kawakami and S.K-Yang, Prog. Theor. Phys. Suppl. **107** (1992) 59

最後に、このテーマに関する共同研究者である筑波大の梁成吉氏には多くのことを教わった。ここに記して感謝したい。